Wiesław Wójcik

Dlaczego teoria mnogości stała się podstawą współczesnej matematyki

Abstrakt

Teoria mnogości pojawiła się pod koniec XIX wieku jako „efekt uboczny" pracy nad uściśleniem podstaw matematyki. Chcąc uściślić podstawowe pojęcia geometrii i analizy matematycznej natrafiono na konieczność określenia pojęcia zbioru, w tym przede wszystkim zbioru nieskończonego. Chodziło o takie pojęcia jak: krzywa geometryczna, zbieżność szeregu, liczba rzeczywista. Pojęcie zbioru okazało się bardzo przydatne przy tworzeniu i precyzowaniu kolejnych teorii matematycznych, w tym topologii i teorii prawdopodobieństwa. Z jednej strony teoria mnogości pomogła rozwiązać wiele wcześniejszych problemów, a z drugiej sama zaczęła ujawniać w swoich podstawach kolejne antynomie i paradoksy. Prace nad ich rozwiązaniem doprowadziły do jej aksjomatyzacji i gwałtownego rozwoju.

Georg Cantor, gdy definiował w latach 70-tych XIX wieku liczby rzeczywiste natrafił na zagadnienie porównania dwóch nieskończonych zbiorów: zbioru punktów na prostej i zbioru liczbowego. Przyjęcie równoliczności tych zbiorów wymagało dodatkowego aksjomatu o możliwości zanurzenia liczb rzeczywistych w prostej geometrycznej, czyli przyjęcia założenia, że prosta geometryczna nie ma „luk". Ponadto okazało się, że zbiory liczb wymiernych i liczb rzeczywistych mają inną moc (dwie różne nieskończoności), natomiast dowolny, odcinek, prosta, kostka dowolnego wymiaru mają tę samą moc. Było to bardzo nieintuicyjne i wymagało badań nad kryteriami rozróżniania różnych obiektów matematycznych i nad samym zagadnieniem nieskończoności (teoria liczb pozaskończonych). Samo wprowadzenie nieskończoności (aktualnej) do matematyki jako obiektu badań wzbudziło z jednej strony opór wielu filozofów i teologów, a z drugiej coraz bardziej wzrastającą fascynację teorią mnogości. Stała się ona w krótkim czasie podstawą matematyki oraz swoistą „filozofią matematyki".